Capítulo 3

Estrategias para la resolución de problemas

Esquema

1. Algunas recomendaciones generales para empezar

Se ha dicho, con razón, que la ocupación con la resolución de problemas es el corazón del quehacer matemático. En gran medida hacer matemáticas consiste en resolver problemas interesantes en cada uno de sus campos. Los resultados más importantes de esta tarea, aquellos que se puede pensar que son de especial interés a fin de resolver otras preguntas en el futuro quedan acumulados en forma de teoremas de la teoría.

Viene bien distinguir entre ejercicios y verdaderos problemas. La mayoría de las actividades que se suelen proponer en los libros de texto al final de cada uno de sus capítulos no son verdaderos problemas, sino sugerencias para que ejercites las ideas, técnicas, herramientas que se te han presentado en el capítulo correspondiente. Simplemente por su colocación en el texto puedes saber casi infaliblemente qué truco debes emplear para llegar al final. Se trata de que con el ejercicio hagas tuyas unas cuantas técnicas que la experiencia ha consagrado como útiles. Por eso cuando uno de estos ejercicios se te resiste probablemente te debes preguntar si has leído y entendido lo que precede suficientemente bien.

Un verdadero problema es una situación que se te presenta en la que sabes más o menos, o bien sabes con toda claridad, a dónde quieres ir, pero no sabes cómo. La principal dificultad consistirá precisamente en aclarar la situación y en dar con algún camino adecuado que te lleve a la meta. A veces, incluso, no sabrás si la herramienta adecuada para la situación está entre la colección de técnicas que se te han presentado hasta ahora y ya dominas e incluso puede suceder que ni siquiera se ha creado hasta ahora una técnica que pueda ser suficientemente potente para resolver el problema. Ésta es precisamente la circunstancia del investigador, en matemáticas y en cualquier otro campo, y por otra parte ésta es la situación en la que nos encontramos a veces veces en nuestra vida normal.

La destreza para resolver genuinos problemas es un verdadero arte que aprenderás con paciencia y considerable esfuerzo, si te lo propones, enfrentándote con tranquilidad, sin angustias, a multitud de problemas diversos, tratando de sacar el mejor partido posible de los muchos seguros fracasos iniciales, observando tus modos de proceder, comparándolos con los de los expertos y procurando ajustar adecuadamente tus procesos de pensamiento a los de ellos, Es la misma forma de transmisión que la de cualquier otro arte, como el de la pintura, la música....

Este arte de resolver problemas es un aspecto de la matemática al que se le ha prestado especial atención en los últimos 50 años, debido sobre todo a la iniciativa de George Polya, un famoso matemático húngaro, extraordinariamente creativo en muchos aspectos de la matemática. A continuación vas a encontrar algunas directrices que te pueden orientar para tratar de mejorar el ejercicio de tus habilidades de resolución de problemas. Estas sugerencias están fuertemente inspiradas en las formas de proceder que Polya mismo propuso en diferentes obras.

El esquema de la forma de proceder para resolver problemas que te propongo se puede resumir en las cuatro fases siguientes

A. FAMILIARÍZATE CON LA SITUACIÓN
B. EN BUSCA DE ESTRATEGIAS
C. LLEVA ADELANTE TU ESTRATEGIA
D. SACA JUGO AL PROBLEMA Y A TU EXPERIENCIA

A continuación vas a encontrar algunos comentarios que vienen a explicar esta fases del proceso

A. Familiarízate con la situación

Se cae de su peso, pero a veces, por apresurados que somos o por prisas que nos imponen desde fuera, nos ponemos inmediatamente en camino... hacia ninguna parte. Sherlock Holmes, un buen ejemplo en el arte de resolver problemas, cuando se le proponía un caso, acumulaba primero toda la información que podía, detalles en todos los periódicos, visitas a lugares posiblemente relacionados, chismes a través de vecinos o a través de la banda de pilletes de Londres, sus espías particulares... y luego, con todo aquel amasijo de datos en su cabeza se ponía... a improvisar en su violín o a hacer locos experimentos de química en su laboratorio personal, por largos ratos. Cuando a ti te propongan un problema, un rompecabezas, un juego, que todo viene a ser lo mismo, debes asegurarte de que entiendes a fondo los términos del problema, las reglas del juego, los datos, y el posible lugar que tiene cada una de sus piezas y cómo se engarzan unas con otras. Manéjalas, familiarízate con los elementos de la situación, juega con ellos un rato. Aunque al principio te parezca otra cosa, ganarás tiempo.

B. En busca de estrategias

En esta etapa del proceso debes tratar de hacerte con unos cuantos posibles modos de ataque del problema. Se trata de que fluyan de tu mente el mayor número de ideas, aunque en principio algunas puedan parecerte totalmente descabelladas. Las ideas más estrafalarias pueden resultar después las mejores. Como dicen los técnicos del *brainstorming* (tormenta de ideas, una de las técnicas de creatividad), cantidad engendra calidad. Todavía no vas a poner en práctica ninguna. Para procurar que fluyan muchas ideas, es necesario que actúes con espontaneidad, que aplaces el juicio crítico sobre ellas, no se trata ahora de decidir si una es mejor que otra. No te importe nada que a primera vista puedan parecer ridículas. ¡Ya veremos si lo son! Al primer *gentleman* que en Londres tuvo la ocurrencia de utilizar una sombrilla para protegerse de la lluvia le bombardearon con insultos y tomates. ¡Diles hoy a los británicos que eso del paraguas es un ridículo y afeminado invento!

Para facilitar este flujo de ideas posibles aquí tienes unas cuantas pautas que puedes ensayar. Estoy seguro de que tu experiencia irá aumentando la lista con sugerencias útiles distintas que a ti te servirán mejor. Más adelante tendremos ocasión de ejemplificar y ejercitar unas cuantas de ellas con más detalle.

B.1. *Busca semejanzas con otros problemas*. Nada hay nuevo bajo el sol. ¿A qué te recuerda la situación? ¿No presientes que tal vez sea como aquella otra...?

B.2. *Empezar por lo fácil hace fácil lo dificil*. El problema es complicado tal vez porque hay muchos elementos. ¿Por qué no te lo haces más fácil tú mismo? Fabrícate uno semejante, más simple, con menos piezas. Tal vez en él te saltará la chispa que te sirva para resolver el más complicado.

B.3. *Experimenta y busca regularidades*, *pautas*. La experiencia es la madre de la ciencia, también de la matemática. Muchos de los grandes resultados de la historia de la ciencia son fruto de muchos experimentos, más o menos locos. También la matemática procede por ensayo y error, otro ensayo y otro error...

B.4. *Hazte un esquema y si se tercia*..., *píntalo en colores*. Somos muchos los que pensamos mejor con imágenes que con palabras. Una imagen vale más que mil palabras. Si tu modo de pensar es así, estás en buena compañía. Einstein, por ejemplo, afirmaba que su pensamiento, cuando investigaba, no era nunca verbal, sino acompañado de imágenes sensoriales, e incluso motrices.

B.5. *Modifica el problema*, *cambia en algo el enunciado*, *para ver si se te ocurre así un posible camino*. No será ya el problema propuesto, pero te puede proporcionar una escalera a la que puedes añadir otra y llegar a tu objetivo.

B.6. *Escoge una buena notación*. Muchos problemas se enrevesan endiabladamente con una
notación inadecuada y se vuelven transparentes como el agua en cuanto tomas los ejes adecuados, los nombres apropiados de los elementos... La notación más adecuada es la que se presta mejor a la expresión de las simetrías, la que expresa abreviadamente la función misma de los elementos que representa. Leibniz y Euler fueron los creadores de una gran parte de la notación que aún hoy usamos en matemáticas y, gracias a su adecuación a lo que querían representar, consiguieron hacer mucho más fáciles problemas complicados.

B.7. *Explota la simetría*..., *si puedes*. Son muchos los problemas que se resuelven mediante el apoyo en la simetría que presentan de forma expresa o velada. Piensa en esta posibilidad en tu caso particular.

B.8. *Supongamos que no*... *¿a dónde nos lleva*? Esto es el método que ya conoces y que se llama reducción al absurdo.

B.9. *Supongamos el problema resuelto*. Esta táctica te será de especial utilidad en aquellos problemas en los que tengas que construir alguna figura, algún elemento que deba estar relacionado de forma determinada con otros que te den. Al imaginarte el problema resuelto, construyendo de forma aproximada, a ojo, cómo debe de ir la cosa tienes la oportunidad de explorar las relaciones entre los elementos dados y los que buscas y así, al aproximarlos, puede saltar la chispa que te haga ver claro cómo debes proceder a partir de los datos

B.10. *Piensa en métodos generales*: *inducción*, *descenso*, *proceso diagonal*, *principio del palomar*... Algunos nos los hemos encontrado en el capítulo anterior y algunos otros los practicaremos enseguida.

C. **Lleva adelante tu estrategia**

Tienes ya acumuladas en la fase B unas cuantas estrategias posibles para atacar tu problema. Lo más aconsejable es que tengas delante una lista escrita de todas ellas, sin olvidar las que en un principio te parecieron más absurdas...Lo mejor sería que ahora, para incubar tus ideas y esperar la iluminación, te dedicaras un buen rato a tocar el violín o a hacer experimentos de química, como Sherlock Holmes, o bien a hacer experimentos de cocina, que es algo parecido y mucho más sustancioso... o bien que te enfrascaras en cualquiera de tus manías preferidas. Deja que tu subconsciente amase a su gusto el revoltijo de ideas que le has preparado...

Has vuelto al problema. Ahora llega el momento de juzgar cuáles de las estrategias que tienes en tu papel tienen más probabilidades de éxito. Tal vez la idea que antes parecía tan descabellada ahora te parezca precisamente la mejor.

C.1. *Lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la etapa B*. Una a una. No las mezcles en un principio. Trabaja con decisión y confianza en ti mismo, ordenadamente, con paz, sin aturullamientos. Si al poner en práctica una idea se te ocurre otra totalmente inconexa con ella que piensas que puede ayudarte, ¡no la deseches! ¡Apúntala en tu lista! Pero tampoco dejes desviar tu atención de la que ahora estás llevando adelante.

C.2. *No te arrugues fácilmente*. Pero tampoco te emperres demasiado con una sola idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía. No abandones fácilmente una idea que te pareció buena, pero debes estar preparado a reconocer que tal vez su bondad fue un espejismo que resulta claro al adentrarte más en ella. Si ves que no te acerca nada a la solución, ensaya otra. Recuerda: ensayo y error, ensayo y error...

C.3. *¿Salió*? *¿Seguro*? *Mira más a fondo tu solución*. No te engañes a ti mismo. Las medias ideas y medias soluciones sirven de poco. Cerciórate bien de que has llegado a la solución.

D. **Saca jugo al problema y a tu experiencia**

¿Has resuelto tu problema? ¡Enhorabuena! ¿O bien lo has trabajado durante horas, has acabado por no resolverlo y has decidido mirar la solución? ¡Enhorabuena también! Si has pasado un buen rato interesado, entretenido, intentando, y has decidido mirar cómo se resuelve, la experiencia puede ser incluso más satisfactoria que en el primer caso. Muchas veces aprende uno mucho más y más profundamente de los problemas intentados con interés y tesón... y no resueltos, que de los que uno resuelve casi a primera vista. Lo que hace falta en todo caso ahora es que reflexiones sobre todo el proceso durante un rato para darte a ti mismo una idea de cuáles fueron tus dificultades, los callejones sin salida en los que te metiste y por qué..., y cómo podrías proceder en el futuro para resolver mejor otros problemas, semejantes o no. Esta etapa del proceso puede ser la más provechosa de todas... y la que más a menudo olvidamos realizar.

D.1. *Examina a fondo el camino que has seguido tú*. ¿Cómo has llegado a la solución? ¿O por qué no has llegado a la solución? ¿Ibas bien encaminado desde el principio? ¿Habías intuído la estrategia correcta en la fase B? ¿O por qué no se te ocurrió pensar en ella? ¿Qué es lo que te engañó al escoger estrategias? ¿Cuál fue la chispa que te hizo intuir que iba a ir bien?

D.2. *Trata de entender no sólo que la cosa efectivamente marcha*, *sino también por qué tiene que marchar así*. No te contentes con ser el afortunado burro a quien le sonó la flauta por casualidad. Sí no te exiges más, la mayor parte de las veces serás más desafortunado. Por definición, las casualidades son raras.

D.3. *Mira ahora a ver si se te ocurre hacerlo de modo más simple*. Los matemáticos no suelen considerar que han entendido un teorema si no son capaces de verlo con una sencilla mirada sosegada que les permita contemplar de un golpe al menos sus piezas principales, sin tener que reptar penosamente de un silogismo a otro. Quien lo consigue entender así, será capaz de edificar sobre este resultado otras estructuras más potentes.

D.4. *Mira hasta dónde da de sí el método que has seguido para ver si lo puedes usar en otras circunstancias*. Tal vez puedas inventar tú mismo otros problemas más interesantes que se resuelvan con los mismos procedimientos, la misma idea feliz.

D.5. *Reflexiona un poco sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro*. Con experiencias repetidas como ésta tal vez te puedas hacer un diagnóstico de tu propio estilo de conocimiento. Cada uno tiene el suyo peculiar. ¿Cómo es tu pensamiento? ¿Visual o analítico? ¿Dependes mucho de la expresión verbal o de la fórmula escrita? ¿Tiendes a pensar en círculos, obsesivamente? ¿Tiendes al compromiso con una sola idea, sin flexibilidad? ¿Cómo podrías fomentar la fluencia espontánea de ideas variadas, originales, novedosas? Si lo consigues, tendrás una gran ventaja al saber en qué clases de problemas te puedes ocupar con ventaja y en cuáles tu probabilidad de éxito no es tan grande. Sabrás cómo abordar problemas, no ya matemáticos, sino de toda clase, aproximándote a ellos tratando de sacar el mejor partido posible de las ventajas de tu propio estilo.

Aquí tienes en esquema esta forma aconsejada de proceder, para que la puedas tener bien presente, a modo de chuleta, en los ejemplos y ejercicios que más adelante se presentan:

A. ANTES DE HACER TRATA DE ENTENDER

B. EN BUSCA DE ESTRATEGIAS
B.l. Busca semejanzas con otros problemas.
B.2. Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil.
B.3. Experimenta y busca regularidades, pautas.
B.4. Hazte un esquema y si se tercia píntalo en colores.
B.5. Modifica el problema, cambia en algo el enunciado, para ver si se te ocurre así un posible camino.
B.6. Escoge una buena notación.
B.7. Explota la simetria..., si puedes.
B.8. Supongamos que no..., ¿a dónde nos lleva?
B.9. Supongamos el problema resuelto.
B.10. Piensa en técnicas generales: inducción, descenso, proceso diagonal, principio del palomar...

C. LLEVA ADELANTE TU ESTRATEGIA
C.1. Lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la etapa B. Una a una. No las mezcles en principio.
C.2. No te arrugues fácilmente. Pero tampoco te emperres demasiado con una sola idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra via.
C.3. ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.

D. SACA JUGO AL PROBLEMA Y A TU EXPERIENCIA
D.1. Examina a fondo el camino que has seguido tú. ¿Cómo has llegado a la solución? ¿O por qué no has llegado a la solución?
D.2. Trata de entender no sólo que la cosa efectivamente marcha, sino también por qué tiene que marchar así.
D.3. Mira ahora a ver si se te ocurre hacerlo de modo más simple.
D.4. Mira hasta dónde da de si el método que has seguido para ver si lo puedes usar en otras circunstáncias.
D.5. Reflexiona un poco sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

2. La práctica de algunas estrategias

A continuación vamos a tratar de presentar de modo más práctico algunas de estas formas de proceder en la resolución de problemas. Los ejemplos y ejercicios que vas a encontrar te facilitarán la tarea de hacerte familiares las estrategias correspondientes. Al hacerlo ten en cuenta que lo más importante no es que tú mismo resuelvas o no el problema, ni que lo hagas más o menos rápidamente, sino que fijes tu atención en tus propios procesos de pensamiento con la finalidad de mejorarlos.

Los problemas escogidos tienen en muchos casos el sabor de lo que se suele llamar recreación matemática, juego matemático. Han sido seleccionados así porque su resolución no está basada en la cantidad de conocimientos sistemáticos que poseas, sino en el ejercicio de las formas de pensar, de las estrategias que se te irán presentando.

Las estrategias que tendrás ocasión de aprender y ejercitar a continuación son:

(1) COMIENZA CON UN PROBLEMA SEMEJANTE MÁS FÁCIL

(2) EXPERIMENTA, OBSERVA, BUSCA PAUTAS, REGULARIDADES... HAZ CONJETURAS. TRATA DE DEMOSTRARLAS.

(3) DIBUJA UNA FIGURA, UN ESQUEMA, UN DIAGRAMA,

(4) ESCOGE UN LENGUAJE APROPIADO, UNA NOTACIÓN ADECUADA.

(5) SUPONGAMOS EL PROBLEMA RESUELTO.

(6) PIENSA EN UTILIZAR LA SIMETRÍA DEL PROBLEMA

¿Qué te pueden proporcionar estas estrategias? Unas cuantas formas distintas de afrontar los problemas que, aunque provienen del ejercicio del sentido común, sin embargo, a menos que las ejercites unas cuantas veces explícitamente y percibas distintamente su eficacia, no quedarán impregnando profundamente tu mente y tu estilo de encararte con auténticos problemas, como sucede con tantas otras enseñanzas del sentido común.

Puesto que la finalidad que aquí se persigue consiste fundamentalmente en ayudarte a mejorar tus procesos de pensamiento, los ejercicios que en estas secciones encontrarás no tienen, en general, nada que ver con matemáticas complicadas. No exigen conocimientos rebuscados, sino una utilización adecuada de tu capacidad de pensar.

De lo que aquí se trata, precisamente, es de poner a punto procesos de pensamiento adecuados a diferentes tipos de problemas, no contenidos del conocimiento. Por eso es muy importante aquí que practiques algo que nadie puede hacer por ti y que consiste en ir examinando, al tiempo que te encaras con el problema, o bien después de pasarte un buen rato con él, el camino que tu propio pensamiento va siguiendo, a fin de que la experiencia te vaya ayudando a caminar mejor. Pregúntate por tu modo de organizar el ataque, por las razones de la elección que has hecho entre los diferentes caminos que se te ocurrieron, por tu estado de ánimo, confianza, miedo, entusiasmo, aburrimiento, diversión, desaliento,..., por los momentos en los que te has atascado y cómo los has afrontado. Poco a poco irás conociendo mejor tus recursos y sacarás mucho más partido de ellos.

Entre los problemas propuestos en estas secciones, encontrarás algunos fáciles y otros que no lo son tanto. Tanto de los que resuelvas como de aquellos que se te resistan, puedes sacar gran provecho. Se puede decir que más de aquellos que te resulten más duros y te lleven más tiempo, pues te obligarán a ensayar más caminos y métodos de pensamiento. Nunca consideres que es tiempo perdido el que empleas en ensayar con tesón y con flexibilidad un mismo problema.

2.0. Para empezar, familiarízate con el problema

Lo primero que debes hacer con un problema es familiarizarte con él como quien juega con él. Un problema no es un enemigo, sino un amigo que te proporciona una ocasión para estimular y perfilar tus modos de pensar. Juega con los elementos que en él aparecen, cambiándolos a tu antojo, haciéndote el problema más sencillo, observando cómo se parece a algún otro que conoces mejor.

Para empezar, aquí tienes unos pocos problemas para que te entretengas con ellos a tu aire y ensayes este ejercicio de familiarizarte con ellos. Más adelante irás viendo posibles modos de proceder con ellos.

Rectas en el plano

Se pintan 13 *rectas en el plano. No hay tres de ellas concurrentes ni dos paralelas. ¿Cuántas regiones determinan*?

El número 1000

El número 1000 *se puede descomponer de muchas formas en sumandos enteros positivos. ¿Cuál es la descomposición* $1000 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_n$, *tal que el producto* $a_1a_2a_3 \ldots a_n$ *es máximo*?.

Una desigualdad

¿Será verdad que siempre que $A, B, C, D \quad 0$ *se verifica esta desigualdad*?

$$1 \quad A^{2} \, 1 \quad B^{2} \, 1 \quad C^{2} \, 1 \quad D^{2} \quad 2ABCD$$

Un timo

Un vendedor de telas gana el 30% *sobre el precio de costo. Pero un día descubre un metro defectuoso que hace aumentar sus beneficios al* 33%. *¿Cuánto mide en realidad el metro tramposo*?

Muchos cuadrados

Observa y comprueba que es cierto que

$$2^2 \quad 3^2 \quad 6^2 \quad 7^2$$
$$3^2 \quad 4^2 \quad 12^2 \quad 13^2$$
$$4^2 \quad 5^2 \quad 20^2 \quad 21^2$$

¿Cómo seguir? ¿Por qué sucede esto?

2.1. Comienza con un problema semejante más fácil

A veces te encuentras con un problema que resulta difícil por su tamaño, por presentar demasiados elementos que lo hacen enrevesado y oscuro, Proponte tú mismo, para empezar, un problema semejante lo más sencillo posible y trata de resolverlo. Luego procede a complicarlo hasta llegar al propuesto inicialmente.

¿Qué provecho obtienes procediendo así? Varios, Uno, importante, de orden psicológico: empiezas animándote con tu probable éxito. Otro, de orden racional: en el problema sencillo aparecen, seguramente más transparentes, principios de solución que quedan confusos y opacos en medio de la complejidad del problema inicial. Por otra parte, la manipulación efectiva en un problema de pocas piezas es más fácil que en uno de muchas.

Observa que la simplificación de un problema se puede lograr no sólo por reducción del tamaño, sino también imponiendo alguna condición adicional que no está en el problema propuesto, Incluso, aunque te parezca al principio que tu simplificación es demasiado drástica, comprobarás con frecuencia cómo la ayuda del problema simplificado es muy efectiva.

Observa que esta estrategia es la que practicamos en multitud de circunstancias. El niño que aprende a andar en bicicleta no intenta lanzarse cuesta abajo por su cuenta a gran velocidad. Lo mejor es que empiece con un triciclo para atender primero al problema de los pedales y del volante. Luego vendrá el del equilibrio y se ensayará con dos ruedas. Si aprendes a manejar un coche, lo mejor es que andes primero despacito, sin necesidad de cambiar marchas, y en descampado, para permitirte jugar a tus anchas con el volante. Ya vendrán luego los problemas de conducir en la calle.

También en matemáticas sucede lo mismo. Si estudiamos derivadas, primero, nos las ponemos sencillas, la de un monomio como , ..., luego pasamos a un polinomio y cuando sentimos cierta familiaridad con el proceso, nos lanzamos más lejos.

Este juego de la simplificación del problema que tienes delante es algo que siempre está a tu disposición para salir de esa sensación de atasco que a veces te puede invadir cuando te encuentras ante un problema que te parece ser una muralla que se resiste a tus asaltos. Hazlo conscientemente. Si la muralla que te han puesto es muy alta, hazte tú una parecida más pequeña, pulverízala y anímate adquiriendo práctica para deshacer más tarde la grande.

Aquí tienes unos cuantos casos con los que te puedes ejercitar. Haremos juntos uno de ellos para que puedas ver mejor el sentido de la estrategia. Los demás son para tu propio ejercicio.

Una mosca antojadiza

Has colocado sobre la mesa 25 *monedas de* 1 *euro en esta posición*:

Una mosca viene volando y se posa sobre una de ellas (*la indicada*). *Se le ocurre hacer un paseo andando por las* 25 *monedas*, *pero sin saltar*, *es decir*, *pasando de una moneda a otra que toque a ésta y sin repetir moneda*, *¿Lo podrá hacer*? *¿Le puedes hacer un itinerario adecuado para cada moneda en la que se pueda posar*?

Piensa. Las 25 monedas son muchas. Su cantidad complica el problema excesivamente. Vamos a probar con menos; por ejemplo, con 2 x 2   4 monedas. Es obvio que se pose donde se pose, la mosca tiene el camino bien fácil. Demasiado fácil, pero no importa.

Probemos con 3 x 3   9 monedas. Así:

Si la mosca se posa en una esquina, lo tiene fácil, Si se posa en el centro, también, Pero si se posa en cualquier otra moneda, como fácilmente observarás, lo tiene imposible.

Así, en el caso de 3 x 3   9 monedas, a veces se puede hacer el paseo, y otras, no. Podemos sospechar que en el de 5 x 5   25 monedas suceda algo parecido.

¿Por qué no se puede hacer el paseo en algunos casos cuando hay 9 monedas? Señalemos los centros de las monedas con coordenadas, siendo el (0,0) el centro de la moneda central y suponiendo que el diámetro de las monedas es 1.

Es curioso: ¡los puntos desde los que el paseo no se puede hacer son (0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, 0)! En ellos, la suma de las coordenadas es impar, y en los restantes, la suma de las coordenadas es par. Llamaremos pares a estos vértices y, a los otros, impares.

Observa ahora los movimientos de la mosca. En cada movimiento... ¡Va necesariamente de un vértice par a otro impar, y de uno impar a otro par!

Hay cuatro vértices impares y cinco pares. El paseo de la mosca, empezando por un vértice impar, sería:

Impar   Par   Impar   Par   Impar   Par   Impar   Par   Impar

y esto es imposible. Esto demuestra que no es posible hacer el paseo pedido saliendo de un vértice impar.

Saliendo de un vértice par no se da este obstáculo que hemos encontrado. Podemos demostrar que el paseo es posible sin más que construirlo, lo que es fácil.

Como ves, el caso de las 3x3 9 monedas te proporciona una luz y un método para el de 5x5 25, que se resuelve de modo parecido. A ti te lo dejo.

Ejercita la estrategia con los siguientes problemas.

Invirtiendo vasos

Sobre la mesa tienes un montón de vasos . Unos, boca abajo; otros, boca arriba. Quieres ponerlos todos boca arriba, pero invirtiendo, de cada vez, dos vasos al tiempo. ¿Lo podrás hacer? ¿Y si te impones la obligación de invertirlos de tres en tres?

Quitar del montón

Esto es un juego para dos jugadores, A y B. Se coloca un montón de 45 *piedrecillas sobre la mesa. Juega A y puede quitar entre* 1 *y* 7 *piedras. Juega B y puede quitar entre* 1 *y* 7. *Juega A... Gana el que se lleve la última piedra. ¿Hay alguna estrategia para alguno de los jugadores, de modo que esté seguro de ganar? ¿Cómo varía la situación cuando varía el número de piedras? ¿Y si pierde el que se lleve la última?*

Contando diagonales

¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 85 *lados?*

2.2 Experimenta, observa, busca pautas, regularidades. Haz conjeturas. Trata de demostrarlas

En matemáticas las buenas ideas surgen muy a menudo a través de experimentos, como en el resto de las ciencias. Pero los experimentos matemáticos son mucho más fáciles de realizar y menos costosos.

Los experimentos suelen ser de muy diversos tipos. Unas veces se trata de ensayar en casos particulares la aparición de una cierta propiedad. Otras se trata de mirar ciertas figuras, imágenes, dibujos, cambiándolas, introduciendo elementos auxiliares, a fin de enlazar diversas situaciones y de establecer conexiones que sospechamos que existen entre los objetos que manipulamos,

Con el experimento y la observación surge una conjetura. Sigues experimentando con nuevos casos, tratando de constrastar, de poner a prueba tu conjetura. Si también en ellos sucede lo que barruntas, tu conjetura va adquiriendo más fuerza. Si en algún caso no sucede lo que esperas, tendrás que modificar tu conjetura inicial hasta dar con una que cubra todos los casos observados. Luego vendrá la tarea de dar con la razón por la cual tu conjetura se verifica siempre, con la demostración de tu conjetura. Entonces sabrás que tu conjetura tiene que verificarse en todos los casos posibles.

Aquí tienes unos cuantos ejemplos que pueden darte una idea de la variedad de experimentos que se pueden llevar a cabo.

Medianas

Tenemos un triángulo ABC. Se nos ocurre trazar sus medianas, AM, BN, CP. ¡Resulta que parecen cortarse en un punto! Surge una conjetura. ¿Es una casualidad o *es que se cortarán siempre las medianas en un punto. Trazamos otro triángulo y sus medianas, ¡También se cortan! La conjetura se refuerza. Hay que tratar de ver por qué siempre es así. ¿Te atreves?*

1089

Tomamos un número de tres cifras, de modo que no sean las tres iguales; por ejemplo, 637. *A continuación formamos otro número, ordenando las cifras de mayor a menor. Resulta* 763. *Formamos otro, ordenándolas de menor a mayor. Resulta* 367. *Restamos*: 763 - 367 396. *A este último número le damos la vuelta*, 693, *y sumamos los dos últimos* 693 396 1089.

Repetimos con otro, 475.

475 — 754 - 457 297 297 792 1089

¿Qué misterio es éste? ¿Será verdad que partiendo de cualquier número de tres cifras, que no son las tres iguales, resulta 1089? *¿Por qué?*

Aún no resuelto

Toma un número entero positivo cualquiera. Si es par, lo divides por 2. *Si es impar, lo multiplicas por* 3 *y le añades* 1, *Con el número resultante haces lo mismo. Si es par, divides por dos, si es impar, ...*

Por ejemplo, si empezamos con 5, *resulta*

5 , 16 , 8 . 4 , 2 , 1 , 4 , 2 , 1

Se llega a 1 *y se repite*: 4, 2,

Si empezamos con 17, *resulta*

17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Se llega a 1 *y se repite*: 4, 2, 1 ...

Surge la conjetura de que tal vez suceda esto siempre. Aunque se ha comprobado que así es empezando con números de muchísimas cifras, aún no se ha demostrado si la conjetura será cierta siempre.

Dígitos finales de las potencias

Aquí tienes un problema en cuya resolución la experimentación juega un papel decisivo.

¿Cuáles son los dígitos finales de las potencias de exponente 23 *de los números* 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39?

Podría uno pensar en calcular tales potencias con el ordenador, pero sería como matar mosquitos con un cañón. Enseguida surge la idea de que 37^{23} , por ejemplo, termina en lo mismo que termina 7^{23} y así nuestro problema se reduce a ver en qué dígito terminan $1^{23}, 2^{23}, 3^{23}, ..., 9^{23}$

Experimentando un poco, vemos que 1^{23} termina en 1; 5^{23} termina en 5; 6^{23} termina en 6. La cosa es muy sencilla en estos casos.

Experimentamos un poco más haciéndonos una tabla de la cifra final de las potencias sucesivas para los primeros números

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 termina en	1	4	9	6	5	6	9	4	1
n^3 termina en	1	8	7	4	5	6	3	2	9
n^4 termina en	1	6	1	6	5	6	1	6	1
n^5 termina en	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^6 termina en	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Y así sucesivamente. Pero a la vista de la tabla de arriba está claro que, al aumentar el exponente 4 unidades, resultan los mismos dígitos finales. Así $n^9, n^{13}, n^{17}, n^{21}$ terminan en n y n^{23} termina en lo mismo que n^3 . Es decir $1^{23}, 2^{23}, 3^{23}, ..., 9^{23}$ terminan, respectivamente, en 1 8 7 4 5 6 3 2 9

Aquí tienes unos cuantos problemas más para que ejercites por tu cuenta esta estrategia.

Suma de cubos

¿Cuánto vale esta suma?

$$1^3 \quad 2^3 \quad 3^3 \quad 4^3 \quad ... \quad 85^3$$

Ascendientes del zángano

El zángano nace de huevos no fecundados. Por tanto, tiene madre, pero no padre. La abeja hembra, la reina, la que pone los huevos, nace de huevos fecundados. Por lo tanto, tiene padre y madre. ¿Cuántos ascendientes de la generación 15 *tiene un zángano?*

Un número mágico: 495

Escoge un número cualquiera de tres cifras, no todas iguales; por ejemplo, 373. *Construye otro ordenando sus cifras de mayor a menor:* 733.

Ahora las ordenas de menor a mayor: 337.

Resta: 733 - 337 396. *Repite la operación unas cuantas veces con este resultado* 396 *y los sucesivos. ¿Qué observas? ¿Cuál es la razón? ¿Qué pasa con número de dos o cuatro cifras al hacer un proceso semejante?*

¿Cuántos partidos?

En un torneo de tenis se presentan 1022 *jugadores. Se organizan* 511 *partidos y los perdedores son eliminados.*

En la segunda fase, como 511 *es impar, se hace un sorteo para señalar un jugador que pasará sin más a la tercera fase; para los otros.* 510 *se organizan* 255 *partidos y se eliminan los perdedores... ¿Cuántos partidos se juegan en total para determinar al campeón?*

Subconjuntos

¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de n elementos?

En un cuadrilátero

En un cuadrilátero ABO se trazan los puntos medios de los lados: *M de AB*, *N de BC*, *P de CD y* 0 *de DA*. *¿Cómo es la figura MNPQ*?

2.3. Dibuja una figura, un esquema, un diagrama

Son muchos los problemas que se hacen muy transparentes cuando has logrado encontrar una representación visual adecuada de los elementos que en él intervienen. Pensamos mucho mejor con el apoyo en imágenes que con el de palabras, números, símbolos solamente.

Por eso es muy aconsejable, a fin de dar con ideas buenas que te sirvan para resolver tu problema, que esquematices y dibujes, incluso que pintes en colores, para mayor claridad, los elementos que aparecen en la situación que estudias. La imagen o diagrama que te fabriques del problema, debe, de alguna forma sencilla, incorporar los datos relevantes y suprimir los superfluos que pueden conducir a confusión. De esta forma pueden quedar resaltados visualmente las relaciones entre los aspectos importantes del problema y de ahí muy a menudo se desprenden luces que clarifican sustancialmente la situación.

Se puede dibujar, por ejemplo, un esquema de los elementos de la situación y sus relaciones mutuas. Observa el siguiente problema.

Jugando a las cartas

Las señoras X, *Y*, *Z*, *una argentina*, *una española y una brasileña*, *aunque no por este orden*, *están jugando a las cartas*, *sentadas a la*. *mesa camilla*. *Cada una ha pasado una carta a la que se sienta a su derecha*. *La señora Y ha pasado una a la argentina*. *La señora X ha pasado una a la señora que ha pasado una carta a la brasileña*.

¿Cuál es la nacionalidad de X, *Y y Z*?

Dominó

Del juego del dominó se separan las fichas que tienen un 6. *Quieres colocar sobre la mesa las* 21 *fichas restantes siguiendo las reglas del juego*, *es decir*, *la ficha* 2-3 *puede ir empalmada con la* 3-5, *ésta con la* 5-5, *ésta con la* 5-4,... *¿Podrás hacerlo*?

Cuadrados que se cortan

Dos cuadrados iguales en el plano se mueven de modo uno de los vértices de uno delos cuadrados está fijo en el centro del otro. ¿Para qué posición el área de la intersección de los dos cuadrados es máxima?

Tres círculos de igual radio

Se trazan tres circunferencias de igual radio r y centros C_1, C_2, C_3, *que pasan por un mismo punto O. Demuestra que la circunferencia que pasa por los otros tres puntos*, *M*,*N*,*P*, *en que se cortan las circunferencias dos a dos tiene el mismo radio r.*

Se podría pensar en emplear la geometría analítica. Tomando unos ejes centrados en el punto O por el que pasan las tres circunferencias dadas, éstas tienen por ecuación... Hallamos los otros tres puntos de intersección... Y luego deberíamos comprobar que la circunferencia que pasa por estos tres puntos tiene también radio r . Un lío respetable.

El problema resulta sorprendentemente sencillo y elegante mediante una figura como la siguiente

Si trazamos los segmentos finos indicados, observamos que resulta el dibujo en el plano de un cubo situado en el espacio. Al hacerlo nos damos cuenta de que el triángulo MNP en el plano es simétrico al triángulo $C_1C_2C_3$, respecto del punto medio de OO (imagen del centro del cubo). Así, el radio de la circunferencia que pasa por M,N,P, es igual al de la circunferencia que pasa por C_1,C_2,C_3, que es, obviamente, *r*.

Dobleces en una tira de papel

Coloca una tira de papel sobre la mesa. La doblas por la mitad, levantando la parte izquierda de la tira y colocándola sobre la parte derecha. Desdoblas y aparece un pliegue con su pico hacia abajo, hacia la mesa. Ahora doblas dos veces, una vez repitiendo la operación anterior y luego volviendo a plegar la parte izquierda sobre la derecha. Desdoblas. Aparecen en la tira tres pliegues, unos hacia arriba, otros hacia abajo. Doblas tres, cuatro, cinco veces... Más pliegues. Si fueras capaz de doblar quince veces la tira, ¿me podrías decir si al desdoblar el pliegue número 27 a partir de la izquierda estaría hacia abajo o hacia arriba?

2.4. Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada

Sucede muchas veces que el que seas capaz o no de resolver un problema depende muy fundamentalmente de que el estilo de pensamiento que apliques sea el adecuado al problema o no. Por eso piensa bien antes de empezar a trabajar. ¿Será bueno utilizar un lenguaje geométrico, o bien un simple diagrama, o tal vez vendrá bien aquí un lenguaje algebraico, o analítico? ¿Tal vez lo que venga bien sea una modelización con papel, cartón .... ?

Qué es un lenguaje adecuado y qué es uno inadecuado, lo podrás entender por los siguientes ejemplos.

El monje en la montaña

Un monje decide subir desde su ermita a la montaña para pasar allí la noche orando. Sale de la ermita a las 9 de la mañana y después de caminar todo el día llega a la cumbre. Allí pasa la noche y a la mañana siguiente, a las 9 de la mañana, emprende el camino a su ermita por el mismo sendero. Al ir bajando, se pregunta: ¿Habrá algún punto de¡ camino en el que hoy esté a la misma hora que estuve ayer?

Una mente inclinada matemáticamente comienza, tal vez, por hacerse una gráfica de la caminata del monje en cada uno de los dos días. Tiene pocos datos para ello. Se los inventa. Con un poco de trabajo verá, seguramente, la luz...

Una mente menos inclinada matemáticamente puede tener la idea de hacer descender a un monje ficticio, en el mismo día que el monje real sube, repitiendo exactamente el camino de bajada que el monje real hace al día siguiente. Como salen a la misma hora, es claro que a alguna hora se encuentran en el camino. Las matemáticas están de sobra.

El problema de Josephus

En su libro De Bello Judaico, Hegesipo cuenta que cuando los romanos capturaron la ciudad de Jotapat, Josephus y otros cuarenta judíos se refugiaron en una cueva. Allí decidieron los 41 *judíos suicidarse antes que entregarse. A Josephus y otro amigo la idea no les gustaba. Propusieron hacerlo, pero con orden. Se colocarían en círculo y se irían suicidando contando tres a partir de un entusiasta que a toda costa quería ser el primero, ¿En qué lugares se colocaron Josephus y su amigo para ser los dos últimos y, una vez en mayoría absoluta, decidir que no estaban de acuerdo con la automasacre?*

El problema tiene sabor matemático y puedes ensayar herramientas matemáticas. Pero cuánto más sencillo resulta colocar en círculo 41 papelitos con un número 1, 2, 3...,41 cada uno y luego ir simulando los suicidos para ver qué dos papelitos quedan los últimos.

Naturalmente, que si quieres obtener un resultado general con m judíos que se suicidan contando n, ya tendrás que acudir a consideraciones más matemáticas.

Como ves, la adopción de un modo apropiado de encarar un problema tiene una gran importancia. Una vez que decidas el modo de pensamiento, dedica un rato a pensar en la forma concreta de aplicarlo. En un lenguaje geométrico, ¿cuáles serán los ejes de referencia, o los elementos más apropiados para manejar tu problema? Normalmente, debes buscar la simplicidad, la simetría, los elementos que, de una forma más sencilla, ponen bien en claro lo más relevante de tu problema. Si estás utilizando un diagrama, un esquema, debes procurar que éste incorpore lo esencial del problema, sin detalles superfluos que pueden perturbar la comprensión y oscurecer lo verdaderamente importante.

Si tu enfoque es algebraico, presta atención a la notación que empleas. En lo posible, ésta debe representar de la forma más cómoda y manejable los datos del problema y su posible vinculación con lo que buscas.

Aquí.tienes unos cuantos ejemplos, que ponen de manifiesto la importancia de una selección adecuada del lenguaje y de la notación.

Producto de cuatro enteros consecutivos

Observa:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 24 \quad 5^2 \quad 1$$
$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 120 \quad 11^2 \quad 1$$
$$3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 360 \quad 19^2 \quad 1$$

Será verdad que el producto de cuatro enteros consecutivos es siempre un cuadrado perfecto menos una unidad?

El producto de cuatro enteros consecutivos se puede expresar así: $a(a+1)(a+2)(a+3)$ con a entero. Tratar de probar que esto es p^2-1 con p entero parece engorroso.

El producto de los cuatro enteros, si M es el centro de los cuatro enteros, es

$$\left(M-\frac{3}{2}\right)\left(M-\frac{1}{2}\right)\left(M+\frac{1}{2}\right)\left(M+\frac{3}{2}\right)$$

Ahora las cuentas son más sencillas. Trata de ver que efectivamente esto es el cuadrado de un entero menos 1.

Irracionales

Demuestra que si a, b, c son tres números impares, entonces

$$ax^2+bx+c=0$$

no puede tener raíces racionales.

Mi hermano y yo

Mi hermano me lleva 8 años, ¿Dentro de cuántos años su edad será el doble de la mía, si hace tres años era el triple?

Un cuadrilátero

Construye un cuadrilátero ABCD del que conoces los cuatro lados y el ángulo que forman AB con CD.

La moneda que gira

Se dan en el plano dos círculos iguales tangentes. Uno se fija y el otro. que tiene dibujada una flecha en su interior, se hace girar permaneciendo siempre tangente al fijo. Cuando el círculo móvil pasa a ocupar por primera vez la posición del principio, ¿cuántas vueltas ha dado la flecha? ¿Y si el circulo móvil tiene un diámetro que es la cuarta parte del fijo?

2.5. Supongamos el problema resuelto

Un buen modo de descubrir el mejor camino para escalar una montaña, aunque un poco caro, consiste en colocarse arriba con un helicóptero y desde allí estudiar los caminos posibles. En la resolución de problemas, este procedimiento es barato, fácil y de uso constante.

Por ejemplo, busco un número tal que si le sumo su cuadrado resulte 30. No sé cuál es, pero procedo como si lo supiera. Le llamo x y sé que tiene que pasar que $x+x^2=30$ Y ahora me las ingenio para hallar x.

Otro ejemplo. Busco un valor donde la función $y=f(x)=x^3-3x+1$ tenga un mínimo relativo. No sé cuál es, ni siquiera sé si lo habrá, pero procedo como si lo supiera. Le llamo a y sé que si en él hay un mínimo, entonces la derivada f' en ese punto es

0, es decir ha de ocurrir que $3a^2$ 3 0 .Así sólo tengo que mirar si en a 1 ó en a 1 hay un mínimo relativo.

También en geometría es muy útil esta estrategia. Buscas un triángulo de área máxima inscrito en un círculo dado. No sabes cuál es, pero puedes imaginar por un momento que es éste:

Enseguida observas que si *A* está donde lo he dibujado, entonces puedes construir otro triángulo *A BC*, con la misma base y altura mayor, inscrito en el mismo círculo. El triángulo de área mayor con base BC inscrito en el círculo es claramente el isósceles, *A BC*.

Siguiendo esta idea, puedes llegar a ver fácilmente que el triángulo buscado tiene que ser isósceles con respecto a las tres posibles bases, es decir equilátero.

Un triángulo

Con regla, compás y cartabón, construye un triángulo del que te han dado la longitud del lado a y las de las dos medianas m_b y m_c que parten de sus extremos.

Triángulo equilátero inscrito en otro triángulo

Te dan un triángulo ABC y una dirección d. Construye un triángulo equilátero, que tenga un vértice en cada uno de los lados de ABC y tal que uno de sus lados tenga la dirección de d.

2.6. Piensa en utilizar la simetrías presentes en el problema.

A veces la estructura del problema mismo sugiere que utilicemos en su resolución las posibles simetrías que en él observamos. He aquí unos cuantos ejemplos que pueden poner en claro esta idea.

Jugando sobre el tablero.

Esto es un juego para dos jugadores Álvaro y Beatriz. Se juega por turnos con un tablero 8 8. *Sale Álvaro y coloca un euro en una casilla, la que prefiera. Le toca a Beatriz. Coloca un euro sobre una casilla no ocupada. Le toca a Álvaro. Coloca un euro en una casilla no ocupada... Pierde el que no pueda colocar moneda y se lleva todas las monedas colocadas el que gana. ¿Quién preferirías ser Álvaro o Beatriz? ¿Y si juegas en un tablero* 7 7, *o en uno* 7 4?

El tablero 8 8 tiene una cierta simetría... Su centro está en... Tal vez alguno de los dos tenga una estrategia para ganar siempre gracias a ella...

Ahora jugamos al tute de cuatro

¿Qué es más probable, que entre mi compañero y yo tengamos todos los triunfos o que no tengamos ninguno?

Como ves, en el reparto de las 40 cartas entre 4 jugadores (dos parejas) hay una cierta simetría que podemos pensar en usar. Si entre mi compañero y yo no tenemos ningún triunfo, ¿dónde están?

Midiendo medio litro

Tengo una jarra en forma de cilindro recto de un litro de capacidad. Pero tengo que medir exactamente medio litro. ¿Qué puedo hacer?

En una progresión aritmética

Toma cuatro enteros en progresión aritmética. Multiplícalos. Suma a este producto la cuarta potencia de la diferencia común de los cuatro enteros. Halla la raíz cuadrada. ¿Qué observas? ¿Por qué pasa esto?

Un ejemplo:

$$7 \quad 14 \quad 21 \quad 28 \quad 57624$$
$$57624 \quad 7^4 \quad 60025$$
$$\sqrt{60025} \quad 245$$

Observa que al producto de los cuatro enteros le puedes dar una forma bien simétrica. Explótala y así verás además cuál es en general el número entero que al final se obtiene.

2.7. El principio del palomar

El principio del palomar, llamado más solemnemente principio de Dirichlet, se basa en la sencilla observación siguiente. Estás sentado en un banco en el parque. A tu alrededor unas cuantas palomas picotean afanosamente. Las cuentas. Son 10. De repente un niño las asusta. Salen todas volando y se meten por los 8 agujeros de un palomar próximo. ¿Qué puedes deducir? Es claro que *al menos dos se han metido por un mismo agujero*. Incluso podrías decir algo más en este caso, pero ya esto es suficientemente interesante en muchos casos. Dirichlet, un excelente matemático del siglo 19, utilizó el principio con destreza para obtener resultados profundos en teoría de números. Te pueden dar una idea de su utilización los ejercicios siguientes.

Madrileños con el mismo número de pelos

No hay cabeza humana en la que se den 200.000 *pelos*. *Madrid tiene alrededor de* 3 *millones de habitantes*. *Demuestra que hay al menos* 10 *de ellos que tienen el mismo número de pelos*. *¿Puedes asegurar que hay muchos más con el mismo número de pelos*?

Te haces un palomar con 200.001 agujeros. El agujero 1 es para los calvos absolutos, 0 pelos. el agujero 2 para los que tienen 1 pelo,..., el agujero 200001 para los que pudieran tener 200000 pelos. Se van metiendo los madrileños en su correspondiente agujero y ... Trata de razonar para demostrar el resto.

Vecinos en un triángulo equilátero

Tienes en el plano un triángulo equilátero de lado 2 *centímetros*. *Demuestra que es seguro que si eliges* 5 *de los puntos que están dentro del triángulo al menos hay dos de ellos que distan entre sí* 1 *centímetro o menos*.

Ejercicios

Creo que es un capítulo de un libro de J.M. Gamboa

3.1 Principio del palomar.

Este ”principio” consiste en. obscrvar que si f : A – B es una aplicación, entre (los conjuntos finitos tales que A tiene más elementos que B, entonces existe b E B tal que f ’ (b) corista (le al menos dos elementos Su formulación más popular, a la que debe su nombre, dice que si n 1 palomas se alojan en ti palomares, necesariamente hay dos palomas que deben. compartir palomar. El siguiente ejemplo muestra el uso de este principio.

Ejemplo.

Dados cinco puntos situados en la región. encerrada por un triángulo equilátero de lado 2, existen dos de ellos que distan menos de 1.

En efecto, trazando paralelas a los lados por sus puntos medios, queda dividido el triángulo original en cuatro triángulos equiláteros de lado 1, y uno de éstos, digamos S, contendrá, al menos dos de los cinco puntos dados. Para concluir es suficiente observar que la distancia entre dos puntos cualesquiera de S es menor que, 1.

3.2 Contar por dos caminos distintos.

Importantes fórmulas e identidades matemáticas se han obtenido contando el número de elementos de un conjunto finito por dos procedimientos diferentes. Esta estrategia fue empleada en el tema 3 de técnicas combinatorias. Veamos ahora un ejemplo de naturaleza diferente.

Ejemplo

En un torneo de tenis disputado mediante eliminatorias a partido único, de modo que en cada ronda en la que el número de supervivientes sea impar un jugador elegido por sorteo se clasifica sin jugar para la ronda siguiente, participan N jugadores. ¿Cómo calcular el número de partidos celebrados?

La clave radica en que cada partido disputado arroja un perdedor del torneo. Como éste tiene un único ganador hay N - 1 perdedores, y éste es el número de partidos celebrados.

3.3 Visualización.

La necesidad de ser rigurosos en los razonamientos matemáticos dio pie, en la década de los 60, a espesos textos sin ninguna figura En absoluto está reñido el rigor con, la visualización. Dibujar ha sido siempre el primer paso de cualquier razonamiento geométrico, y siempre que se sea capaz de reflejar en una o varias figuras la situación que se pretende analizar, será un procedimiento muy fecundo. Lo emplearemos para probar una importante desigualdad del cálculo integral.

Ejemplo (Desigualdad de Young).

Sea f : [0, oc) -~[0, oc) una función continua, biyectiva y creciente cuya inversa g f ‘ : [0, oc) - [0, oc) es también continua. Sean a y b números reales positivos. Entonces

(1 b

ab:~~~(x)dx fg(x)dx.

0 0

Comencemos por observar que g es también creciente, pues dados x, y e [0, x) con x y,

f (g (-x)) x y f (g (Y)),

luego como f es creciente concluimos qtic g (x) g (y) . De aquí se deduce que f (0) 0, pues en caso contrario sería f (0) 0, y al ser g creciente, 0 g (f (0)) f (0) , absurdo. Así pues la figura representa fielmente las hipótesis, por lo que la suma 5 T de ambas integrales es mayor o igual que el área del rectángulo, que es lo que dice la desigualdad propuesta.

3.4 Aprovechar la simetría.

Con mucha frecuencia debemos analizar situaciones en las que la presencia de alguna simetría nos evita realizar tediosos cálculos. El siguiente ejemplo es tina muestra de lo dicho.

Ejemplo.

Pretendemos calcular la probabilidad de que aparezca un número par de caras al lanzar al aire Un número impar de monedas. Llamando A a dicho suceso y B a su complementario la probabilidad p (B) de B es 1 - p (A) . Al ser impar el número de monedas, el suceso B es

B - ”c1 número de cruces es par

Como en el lanzamiento de cada moneda la probabilidad de que salga cara coincide con la de que salga cruz, resulta que p (B) p (A y por tanto p (A) 112 ya que

p (A) 1 p (B) 1 - p (A) .

El problema se complica si el número de monedas lanzadas es par, pues se rompe la simetría. Podemos recuperarla añadiendo una moneda Como la probabilidad de que la moneda añadida sea cara o cruz es la misma, de nuevo en este caso la probabilidad buscada es 112.

3.6 Emplear la unicidad.

El interés de muchos objetos matemáticos radica, no tanto en qué son como en qué cumplen, o mejor, en que son los únicos que cumplen cierta propiedad, que se suele denominar universal. Quizá ninguno tan característico como el producto tensorial, cuya construcción es tan engorrosa y nunca se emplea. En estas situaciones, para detectar que cierto objeto es el que uno busca, basta comprobar que cumple la propiedad que caracteriza a éste. La geometría elemental proporciona ejemplos significativos de esta estrategia. Veamos uno de ellos.

Ejemplo.

Pretendemos demostrar que el triángulo A APB de la figura es equilátero. Para ello observemos que en el interior del cuadrado K existe un único punto, al que llamamos Q, de modo que A A QB es equilátero, que no es sino el único punto del interior de K en que se cortan la mediatriz del segmento A B y la circunferencia F de centro A y radio la longitud del lado A B. Debemos pites probar que P Q, y para ello probaremos que Q cumple la propiedad que, caracteriza a P, esto es, que el ángulo z‘ QDC mide 15’.

Ahora bien, como Q, B, D el-, se tiene, por XL. 3.2,

,¿D QB 360 o- 90 0 - 135 2 y como la suma de los ángulos del cuadrilátero de vértices D, Q, B, A es 3600, resulta que

~¿ A D Q 3600 - BA D D QB QBA) 3600 - (900 1350 600 750,

por lo que, finalmente,

QDC ADC - ADQ 900 - 75’ 150.

3.7 Buscar un modelo.

Con frecuencia problemas de apariencia intrincada resultan sencillos sí encontramos un modelo en el que lo superfluo se diluye y lo esencial se aprecia con nitidez. Esta es la idea subyacente al aplicar a los datos de un problema tina transformación geométrica, por ejemplo tina isometría, que preserve lo que se quiere medir o estimar y simplifique lo anecdótico. Veamos 1172. ejemplo.

Ejemplo.

Una persona situada en la base de una colina con forma de cono invertido, de altura J8-R y radio de la base R, desea rodearla volviendo al punto de partida. ~Cuál es la longitud del camino más corto?

La clave es someter a la figura a una transformación que no modifique la medida y la convierta en otra en la que conozcamos las trayectorias de longitud mínima. Para ello, si V es el vértice del cono y P el punto de su base donde se encuentra la persona, cortamos a lo largo de la generatriz VP y desarrollamos la figura hasta obtener un sector circular.

Aquí la trayectoria de menor longitud es el segmento que une P con su copia P ’, que mide la longitud buscada L. Empleando las notaciones de la figura observamos que, por el teorema de Pitágoras, el segmento VP mide 3R, mientras que el arco de circunferencia PP, mide 27117, por lo que el ángulo 0 de la figura vale

2z2zR 2z z L -

0 - - - y es decir, J3~ 2sin o sea, L 3j3R.

6zR 3 3 3R